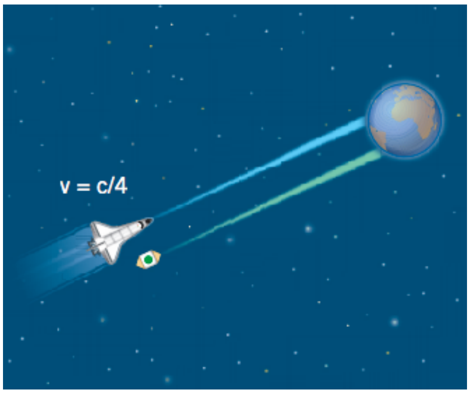
# Esercizi

## Teoria relatività ristretta

## Esercizio

Un'astronave diretta verso la Terra passa di fianco a un «faro» spaziale con velocità c/4 rispetto a esso. Nell'istante in cui sono affiancati, il faro lancia verso Terra un lampo di luce verde e l'astronave un lampo di luce blu. Fuori dall'atmosfera terrestre c'è un sensore in grado di rilevare i lampi di luce. Quale dei due lampi è segnalato per primo dal sensore situato vicino alla Terra?




## Soluzione

I due lampi di luce viaggiano alla stessa velocità (secondo postulato) per cui giungono al sensore nello stesso istante.

## Esercizio

Qual è la differenza tra il principio di relatività galileiana e il primo principio della relatività ristretta?

## Soluzione

Il primo postulato della relatività ristretta estende il principio di relatività galileiana, valido per i fenomeni meccanici, a tutti i fenomeni fisici, in particolare a quelli elettromagnetici.

## Esercizio

In che cosa differiscono le opinioni di Maxwell ed Einstein sul valore della velocità della luce nel vuoto?

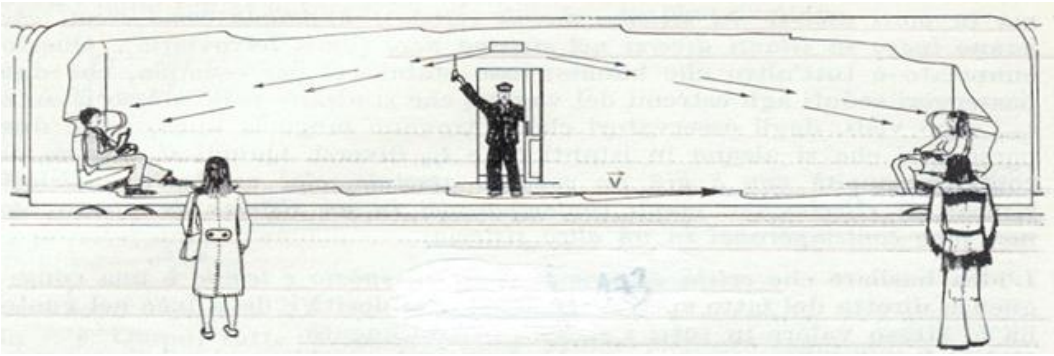
## Soluzione

La differenza è nell'esistenza o meno dell'etere. Secondo Maxwell, la velocità della luce è pari a *c* solo nel sistema di riferimento in cui l'etere è in quiete. Secondo Einstein, per il quale l'etere non esiste non solo fisicamente ma anche non necessario concettualmente, il valore di *c* è lo stesso in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

## Esercizio

Al centro di un vagone di un treno, che si muove di moto rettilineo uniforme con velocità v, si trova una lampadina che a un certo istante viene accesa. I raggi di luce che si propagano verso i due passeggeri di testa e di coda del vagone vi arrivano nello stesso istante?

### Soluzione

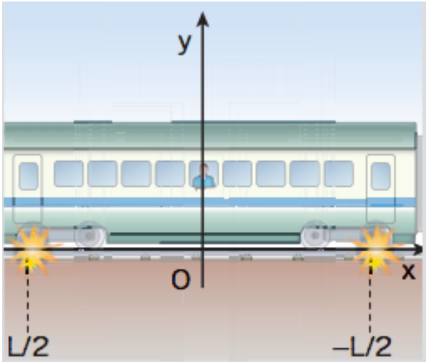


La simultaneità, essendo un concetto relativo, comporta che eventi simultanei in un sistema di riferimento non lo sono in un altro. Quindi, quando la lampadina viene accesa al centro del vagone, i due passeggeri, seduti a uguale distanza dalla lampadina, percepiscono la luce nello stesso istante. Per i due passeggeri i due lampi di luce (i due eventi) arrivano simultaneamente. Invece, per i due osservatori che si trovano fuori dal vagone, solidali con il sistema terra, gli eventi (i due lampi di luce percepiti dai due viaggiatori) non sono simultanei. Infatti, per i due osservatori i due eventi sono simultanei, avendo la luce la stessa velocità c in tutti i sistemi di riferimento inerziali (secondo postulato), ma per essi il viaggiatore seduto a sinistra del vagone percepisce il lampo di luce prima del viaggiatore a destra, perché nel tempo che la luce impiega per propagarsi, il treno, e quindi i viaggiatori, si sono spostati verso destra con velocità v.

## Esercizio

Un treno è lungo 200 m e si muove alla velocità costante di 300 km/h. In un tratto rettilineo, agli estremi del treno esplodono due petardi. Secondo un osservatore posto a terra, le due esplosioni sono simultanee. Quanto vale, per l'osservatore posto al centro del treno, l'intervallo di tempo che separa l'arrivo dei lampi di luce delle esplosioni?

# Soluzione




Utilizziamo come sistema di assi cartesiani quello solidale con il terreno e disposto lungo il binario. Le posizioni dei due petard sono x=-L/2 e x=L/2. Con questa scelta, all'istante t=0 s in cui sono avvenute le esplosioni (che, secondo l'osservatore fermo rispetto al terreno, sono state simultanee) l'osservatore sul treno occupava il punto di ascissa x=0 m.
Per la legge del moto rettilineo uniforme, le leggi del moto per l'osservatore sul treno e per i due raggi di luce sono:

$$x_0 = vt \ (osservatore)$$
$$x_0 = -\frac{L}{2} + ct \ (raggio\ di\ luce\ da\ \sin istra)$$
$$x_0 = \frac{L}{2} - ct \ (raggio\ di\ luce\ da\ destra)$$

Ora possiamo trovare gli istanti di tempo $t_s$ e $t_d$ a cui i due raggi di luce giungono all'osservatore.
$t_s$ è determinato imponendo che l'osservatore e il raggio di luce che proviene da sinistra occupino la stessa posizione. In modo analogo si trova $t_d$ :

$$vt_s = -\frac{L}{2} + ct_s \ \Rightarrow\ t_s = \frac{L}{2(c-v)}$$
$$vt_d = -\frac{L}{2} + ct_d \ \Rightarrow\ t_d = \frac{L}{2(c+v)}$$

Quindi, l'intervallo di tempo che separa gli istanti in cui l'osservatore vede le esplosioni dei petardi è:

$$\Delta t = t_s - t_d = \frac{L}{2(c-v)} - \frac{L}{2(c+v)} = \frac{Lv}{c^2 - v^2} = \frac{200 \cdot 83{,}3}{(3 \cdot 10^8)^2 - 83{,}3^2} = 1{,}85 \cdot 10^{-13}\ s$$

(attenzione alle unità di misura).

La simultaneità, essendo un concetto relativo, comporta che eventi simultanei in un sistema di riferimento non lo sono in un altro. Ovviamente, essendo il valore di Δt molto piccolo, l'osservatore sul treno non può rendersi conto del ritardo tra l'arrivo di un lampo di luce e l'altro. Ciò conferma che la relatività della simultaneità (che comunque esiste) non ha effetti rilevanti nei fenomeni quotidiani caratterizzati da velocità molto piccole rispetto a a quella della luce.

## Esercizio

L'astronauta Mario viaggia verso una stella lontana alla velocità pari al 95% di quella della luce, mentre il suo gemello Dario rimane sulla Terra. Mario raggiunge la stella dopo un tempo Δt=10 anni, misurato con gli strumenti di bordo. Calcolare il tempo dello stesso viaggio (durata dello stesso fenomeno) secondo l'orologio terrestre di Dario.

### Soluzione

La durata Δt=10 anni è il tempo proprio del fenomeno perché è misurata nel sistema di riferimento in cui l'astronave risulta ferma (sistema solidale con il fenomeno). La durata del viaggio misurata da Dario è:

$$\Delta t' = \gamma \Delta t = 3{,}2 \cdot 10 = 32 \ anni$$

dove: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}95^2}} = 3{,}2 \qquad \beta = \frac{v}{c} = \frac{0{,}95c}{c} = 0{,}95$

## Esercizio

Facciamo qualche conto sui muoni prodotti nell'alta atmosfera dai raggi cosmici.

### Soluzione

Secondo la cinematica classica (tempo e spazio assoluti), un muone che viaggia quasi alla velocità della luce (99,92%), nel tempo t=2,2 μs percorrerebbe la seguente distanza prima di decadere:

$$d = c\Delta t = 3 \cdot 10^8 \cdot 2{,}2 \cdot 10^{-6} \approx 660 \ m$$

Ed ecco il problema: sulla Terra ne arrivano più della metà, e l'atmosfera ha uno spessore di circa 15 km.
**Domanda**: come fanno ad arrivare sulla Terra se "muoiono" dopo 660 metri?
**Soluzione**: dobbiamo utilizzare la teoria della relatività, in quanto le formule e i concetti della fisica classica non funzionano quando gli oggetti sono molto veloci:

$$\Delta t' = \gamma \Delta t = 25 \cdot 2{,}2 = 55 \ \mu s$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}9992^2}} = 25 \qquad \beta = \frac{v}{c} = \frac{0{,}9992c}{c} = 0{,}9992$$

In questo tempo, il muone percorrerà la distanza:

$$d = c\Delta t = 3\cdot 10^{8}\cdot 55\cdot 10^{-6}\approx 16\ km$$

Ecco perché circa il 40% dei muoni arrivano sulla Terra.

## Esercizio

Poichè anche i processi biologici devono soddisfare i postulati della relatività, calcolare la velocità che deve avere una navicella affinchè il suo equipaggio invecchi della metà rispetto al personale di controllo rimasto a terra.

### Soluzione

La dilatazione del tempo comporta che i due intervalli di tempo Δt e Δt', misurati nei due sistemi di riferimento diversi (navicella e Terra) per la durata dello stesso fenomeno, sono differenti:

$$\Delta t' = \gamma \Delta t$$

Pertanto, affinchè il tempo Δt sulla navicella sia la metà di quello Δt' sulla Terra , il fattore di dilatazione deve essere 2, quindi:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 2 \Rightarrow \beta = \sqrt{\frac{\gamma^2-1}{\gamma^2}} = \sqrt{\frac{4-1}{4}} = 0{,}866$$

Conoscendo β è possibile ricavare la velocità della navicella:

$$\beta = \frac{v}{c} \Rightarrow v = \beta c = 0{,}866c$$

che è circa l'87% di quella della luce.

## Esercizio

Un'astronave si trova ferma a una distanza di 15 UA (1unità astronomica = $1{,}496\text{x}10^{11}$ m) dalla Terra. Viene inviato un messaggio alle ore 9:55 del mattino secondo i loro orologi.

- A che ora arriva il messagio sulla Terra?

- Appena inviato il messaggio, l'astronave inizia a muoversi per 30 minuti, secondo i loro orologi, con una velocità costante v=0,600c. Quanto tempo è passato per gli orologi sulla Terra?

## Soluzione

- Le onde elettromagnetiche viaggiano alla velocità costante della luce, per cui il messaggio arriva sulla Terra alle ore:

$$\Delta t = \frac{D}{c} = \frac{15\cdot 1,5\cdot 10^{11}}{3,0\cdot 10^{8}} = 7,5\cdot 10^{3}\,s = 2^{h}5' \qquad ora = 9^{h}55' + 2^{h}5' = 12^{h}$$

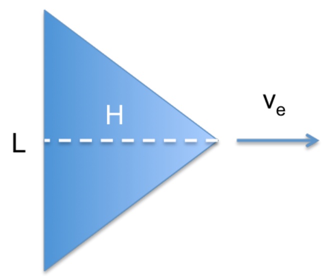
La dilatazione del tempo comporta che i due intervalli di tempo Δt e Δt', misurati nei due sistemi di riferimento diversi (navicella e Terra) per la durata dello stesso fenomeno, sono differenti, per cui sulla Terra è passato un tempo più lungo pari a:

$$\Delta t' = \gamma \Delta t = 1,25\cdot 30 = 37,5 \text{ min}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0,6^2}} = 1,25 \qquad \beta = \frac{v}{c} = \frac{0,6c}{c} = 0,6$$

## Esercizio

Un elettrone si muove con velocità $v_e$=0,98c all'interno di un acceleratore di particelle, in cui è presente una etichetta a forma di triangolo equilatero, di lato L=4 cm, con l'altezza nella direzione del moto dell'elettrone. Determina l'area del triangolo nel sistema di riferimento dell'elettrone.




## Soluzione

L'altezza del triangolo equilatero, nel suo sistema di riferimento, vale (teorema di Pitagora):

$$H = \sqrt{L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}L^2} = L\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Per l'invarianza delle lunghezze perpendicolari al moto relativo, solo la componente orizzontale del triangolo, ossia l'altezza, subisce una contrazione. Pertanto, nel sistema di riferimento dell'elettrone l'altezza appare contratta e di valore pari a:

$$H' = \frac{H}{\gamma} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{L}{\gamma} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{4}{5,03} = 0,689\ cm$$

dove: $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-0,98^2}} \cong 5,03$ $\qquad \beta = \dfrac{0,98c}{c} = 0,98$

Quindi, l'area del triangolo è:

$$A = \frac{L \cdot H'}{2} = \frac{4 \cdot 0,689}{2} = 1,4\ cm^2$$

## Esercizio

Un aereo lungo $L_0$=80 m (lunghezza propria) viaggia alla velocità di crociera di 900 km/h rispetto alla Terra. A) Calcolare la lunghezza dell'aereo misurata da un osservatore solidale con la Terra. B) Con quale velocità deve muoversi rispetto all'osservatore affinchè appaia contratto di 40 cm.

### Soluzione

A) Applichiamo la formula della contrazione delle lunghezze:

$$L = \frac{L_0}{\gamma} \cong L_0 \qquad \text{comunque: } L < L_0$$

dove: $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-(8,33\cdot 10^{-7})^2}} \cong 1$ $\qquad \beta = \dfrac{v}{c} = \dfrac{250}{3\cdot 10^8} = 8,33\cdot 10^{-7}$


Essendo la velocità dell'aereo molto piccola rispetto a quella della luce, gli effetti della contrazione non sono rilevanti. Volendo fare i calcoli con estrema precisione, si otterrebbe una contrazione dell'ordine del raggio dell'atomo di idrogeno (53 pm).

B) Dalla formula della contrazione delle lunghezze ricaviamo il fattore di contrazione:

$$\gamma = \frac{L_0}{L} = \frac{80}{79,6} = 1,005$$

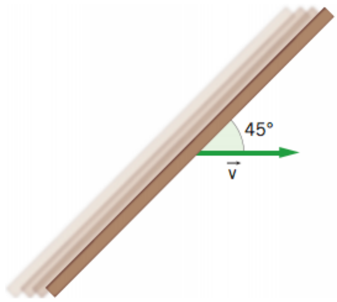
e quindi la velocità dell'aereo:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \beta = \sqrt{\frac{\gamma^2-1}{\gamma^2}} = \sqrt{\frac{1{,}005^2-1}{1{,}005^2}} = 0{,}0996$$

$$\beta = \frac{v}{c} \Rightarrow v = \beta c = 0{,}0996 \cdot 3 \cdot 10^8 = 0{,}3 \cdot 10^8 \ m/s = 3 \cdot 10^4 \ km/s$$

## Esercizio

Un'asta di lunghezza a riposo $L_0$=10m si muove a una velocità costante pari a 70% di quella della luce e forma un angolo di 45° con la direzione del moto. Qual è la sua lunghezza secondo un osservatore fermo al suolo?




### Soluzione

Le componenti (verticale ed orizzontale) dell'asta a riposo sono:

$$\Delta x = L_0 \cos\alpha = L_0 \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} L_0$$
$$\Delta y = L_0 sen\alpha = L_0 sen 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} L_0$$

Per l'invarianza delle lunghezze perpendicolari al moto relativo, la componente verticale della lunghezza rimane invariata. La componente orizzontale, invece, subisce una contrazione pari a:

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma} = \frac{\sqrt{2} L_0}{2\gamma} \quad \text{dove: } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

Pertanto, la lunghezza dell'asta vista dall'osservatore a terra è:

$$L = \sqrt{(\Delta x')^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \frac{L_0^2}{\gamma^2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 L_0^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 L_0^2 \left(\frac{1}{\gamma^2}+1\right)} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) L_0 \sqrt{1+\frac{1}{\gamma^2}}$$

Passiamo ai calcoli:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0,7^2}} = 1,4 \qquad \beta = \frac{0,7c}{c} = 0,7$$

$$L = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) L_0 \sqrt{1+\frac{1}{\gamma^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 10 \cdot \sqrt{1+\frac{1}{1,4^2}} = 8,7\ m$$

La lunghezza di un segmento misurata in un sistema di riferimento in cui esso è in movimento risulta sempre minore della lunghezza propria (lunghezza a riposo) del segmento stesso.

## Esercizio

Un'auto imbocca un tunnel alla velocità 2c/3. Il tunnel è lungo 50 m nel suo sistema di riferimento S. L'ingresso dell'automobile è simultaneo all'accensione delle luci. Quanto tempo impiega l'auto nel suo sistema di riferimento S' per uscire dal tunnel?

### Soluzione

Per la contrazione delle lunghezze, il tunnel misurato nel sistema S′ è lungo:

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = \frac{50}{1,35} = 37\ m$$

dove: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0,67^2}} = 1,35 \qquad \beta = \frac{v}{c} = \frac{2c/3}{c} = 0,67$

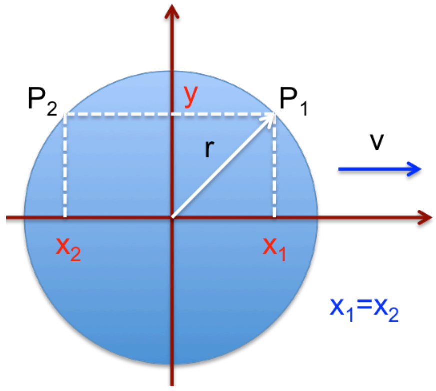
## Esercizio

Un disco ha forma circolare e raggio r=32 cm quando è fermo nel suo sistema di riferimento S. a) Se si muove di moto rettilineo uniforme alla velocità di $2 \times 10^5$ km/s rispetto a un osservatore fermo al suolo (sistema di riferimento S'), la forma del disco cambia? B) Dimostra che la forma del disco in moto è ellittica. C) Calcola la lunghezza degli assi dell'ellisse nel sistema di riferimento S' dell'osservatore.

### Soluzione

a) Per l'invarianza delle lunghezze perpendicolari al moto relativo, la componente verticale della lunghezza (diametro del disco perpendicolare al moto) rimane invariata. La componente orizzontale (diametro del disco nella direzione del moto), invece, subisce una contrazione, per cui cambia la forma del disco in moto rispetto a S'.

b) Fissando il seguente sistema di assi cartesiani, la corda $P_1P_2$ è lunga $L_0$ nel proprio sistema di riferimento S:



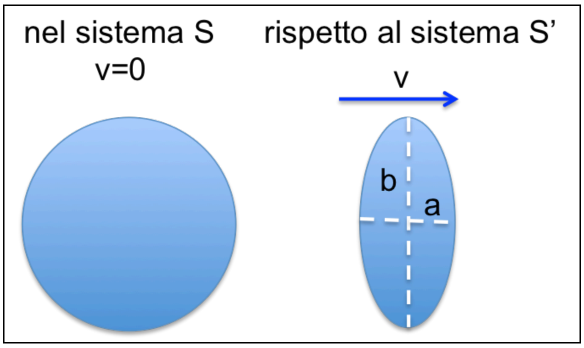

$$L_0 = P_1P_2 = x_1 - x_2 = 2x = \xrightarrow{\text{teorema di Pitagora}} = 2\sqrt{r^2 - y^2}$$

Rispetto al sistema di riferimento S' solidale con il suolo, per la contrazione delle lunghezze, questo segmento $L_0$ si contrae:

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = \frac{L_0}{\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}} \Rightarrow x_1^{'} - x_2^{'} = 2x' = 2\sqrt{r^2 - y^2} \cdot \sqrt{1-\beta^2} \Rightarrow \frac{x'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \sqrt{r^2 - y^2}$$

Elevando a quadrato primo e secondo membro si ottiene la seguente equazione:

$$\frac{x'^2}{1-\beta^2} = r^2 - y^2$$




L'equazione ottenuta è un'ellisse, per cui, come si voleva dimostrare, la forma del disco, rispetto al sistema S', è cambiata.

c) Per quanto abbiamo detto in precedenza, la lunghezza 2b dell'asse verticale dell'ellisse non cambia per l'invarianza delle lunghezze perpendicolari al moto:

$$2b = 2r = 64 \ cm$$

mentre la lunghezza 2a dell'asse orizzontale lungo la direzione del moto, rispetto al sistema S' subisce una contrazione, e vale:

$$2a = \frac{2r}{\gamma} = \frac{64}{1{,}35} = 47{,}4 \ cm$$

dove: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}67^2}} = 1{,}35$ $\qquad \beta = \frac{v}{c} = \frac{2 \cdot 10^5}{3 \cdot 10^5} = 0{,}67$

## Esercizio

Nel sistema di riferimento del laboratorio due eventi avvengono nello stesso luogo a distanza di 2,0 s l'uno dall'altro. In un secondo sistema di riferimento, i due eventi avvengono a distanza di 2,1 s l'uno dall'altro. Quanto distano spazialmente tra loro i luoghi dei due eventi nel secondo sistema di riferimento?

## Soluzione

Nella teoria della relatività non si può parlare dello spazio senza parlare del tempo e viceversa. L'unificazione dello spazio e del tempo genera una nuova grandezza chiamata spaziotempo. Nello spaziotempo per descrivere un fenomeno, occorre sapere che è avvenuto a un dato istante e in un certo punto dello spazio. Quindi per rappresentare un evento abbiamo bisogno di quattro coordinate (t,x,y,z). Ora, dati due eventi, le coordinate spaziotemporali di ciascuno di essi cambiano da un sistema di riferimento inerziale a un altro, ma la loro "distanza spaziotemporale" non varia. Ossia, l'intervallo spaziotemporale fra i due eventi:

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (c\Delta t)^2$$

è invariante, cioè dipende soltanto dagli eventi stessi e non dal particolare sistema di riferimento usato per descriverli.
L'intervallo spaziotemporale nei due sistemi di riferimento inerziali sono:

$$(\Delta s_1)^2 = (c\Delta t_1)^2 \rightarrow (c\Delta t_1)^2 - (\Delta s_1)^2 = 0$$
$$(\Delta s_2)^2 = (c\Delta t_2)^2 \rightarrow (c\Delta t_2)^2 - (\Delta s_2)^2 = 0$$

Poiché l'intervallo spaziotemporale è invariante, e tenendo conto che nel primo sistema di riferimento i due eventi avvengono nello stesso luogo ($\Delta s_1=0$), si ha:

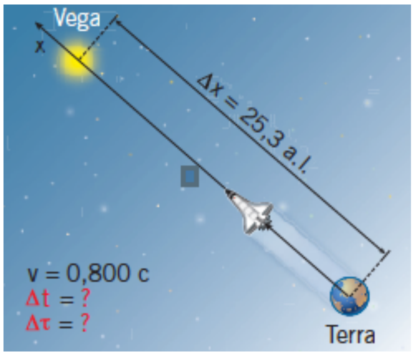
$$(\Delta s_1)^2 = (\Delta s_2)^2$$
$$(c\Delta t_1)^2 = (c\Delta t_2)^2 - (\Delta s_2)^2 \rightarrow (\Delta s_2)^2 = (c\Delta t_2)^2 - (c\Delta t_1)^2 = (2{,}1c)^2 - (2c)^2 = 0{,}41c^2$$
$$\Delta s = \sqrt{0{,}41c^2} = c\sqrt{0{,}41} = 1{,}92 \cdot 10^5 \ km$$

## Esercizio

La stella Vega si trova a 25,3 a.l. (anni-luce) dalla Terra e la vi vuole raggiungere utilizzando un'astronave che viaggia alla velocità di 0,8c. Qual è la durata del viaggio misurata dal centro spaziale sulla Terra? Qual è la durata del viaggio misurata dagli orologi dell'astronave?

## Soluzione

Con la scelta dei sistemi di riferimenti come in figura, si ha:




$$\Delta y = \Delta y' = \Delta z = \Delta z' = 0$$

Quindi, se dal sistema di riferimento Terra la velocità dell'astronave è:

$$v = 0{,}8\ a.l./anni$$

la distanza Δx=25,3 a.l. fino a Vega sarà percorsa nell'intervallo di tempo:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{25{,}3}{0{,}8} = 31{,}6\ anni$$

Nel sistema di riferimento dell'astronave la partenza da Terra e l'arrivo a Vega avvengono nello stesso luogo, l'astronave appunto, per cui si ha Δx'=0. Ciò significa che, nel sistema di riferimento dell'astronave, la durata del viaggio è la durata propria Δτ dell'evento «l'astronave parte dalla Terra e giunge a Vega». Tenendo presente il sistema di riferimento fissato, e l'invarianza dell'intervallo spaziotemporale, si ottiene:

$$(\Delta x')^2 = (c\Delta\tau)^2 \rightarrow (c\Delta\tau)^2 = 0$$
$$(\Delta x)^2 = (c\Delta t)^2 \rightarrow (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = 0$$

$$(\Delta x')^2 = (\Delta x)^2$$

$$(c\Delta\tau)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 \rightarrow \Delta\tau = \frac{\sqrt{(c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2}}{c} = \frac{\sqrt{(1\cdot 31{,}6)^2 - (25{,}3)^2}}{1} = 18{,}9\ anni$$

All'arrivo dell'astronave su Vega, per le persone a Terra saranno trascorsi 31,6 anni, ma per l'equipaggio a bordo ne saranno passati meno di 19.

## Esercizio

Il mesone μ è una particella che, a riposo, decade dopo un tempo di vita media di circa 2,15 μ s. La stessa particella, in moto rispetto a un riferimento terrestre a velocità molto elevata, percorre una distanza media di 6,40 km prima di decadere. Calcola: a) il tempo di vita media del mesone nel sistema di riferimento terrestre; b) la velocità con la quale si muove il mesone nel sistema di riferimento terrestre.

## Soluzione

a) Nel sistema di riferimento della particella il decadimento avviene nello stesso luogo, per cui si ha Δx'=0. Ciò significa che, nel sistema di riferimento della particella, il tempo di decadimento coincide con la vita media Δτ (durata propria) del mesone. Quindi, attraverso l'invarianza dell'intervallo spaziotemporale, il tempo di vita media del mesone nel sistema di riferimento terrestre è:

$$(\Delta x')^2 = (c\Delta\tau)^2 \rightarrow (c\Delta\tau)^2 = 0$$
$$(\Delta x)^2 = (c\Delta t)^2 \rightarrow (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = 0$$

$$(\Delta x')^2 = (\Delta x)^2$$

$$(c\Delta\tau)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 \rightarrow \Delta t = \frac{\sqrt{(c\Delta\tau)^2 + (\Delta x)^2}}{c} =$$
$$\sqrt{(\Delta\tau)^2 + \left(\frac{\Delta x}{c}\right)^2} = \sqrt{\left(2{,}15\cdot 10^{-6}\right)^2 + \left(\frac{640\cdot 10^3}{3\cdot 10^8}\right)} = 2{,}14\cdot 10^{-5}\, s$$

Nel sistema di riferimento terrestre la vita media del mesone è più lunga, di cira un ordine di grandezza.

b) La velocità con la quale si muove il mesone nel sistema di riferimento terrestre, essendo un moto rettilineo uniforme, vale:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{640\cdot 10^3}{2{,}14\cdot 10^{-5}} = 2{,}99\cdot 10^8\ m/s$$

Praticamente, si muove alla velocità della luce.

## Esercizio

Nello spazio-tempo a due dimensioni (una dimensione temporale e una spaziale), considera gli eventi A(0,72 μs; 1,5 km) e B(0,95 μs; 1,7 km) rilevati in un riferimento S. In un riferimento S' i due eventi risultano simultanei. Calcola la velocità del sistema S' rispetto al sistema S.

## Soluzione

Grazie all'invarianza dell'intervallo spaziotemporale (tenendo presente che nel sistema S' i due eventi sono simultanei Δx'=0):

$$(\Delta s)^2 = (\Delta s')^2 \Rightarrow (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = -(\Delta x')^2 \rightarrow \; = (\Delta x')^2 = (\Delta x)^2 - (c\Delta t)^2$$

e alla trasformazione di Lorentz:

$$x = \frac{x' - vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

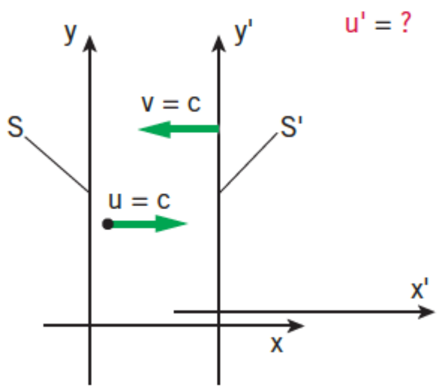
si ottiene la velocità del sistema S'rispetto al sistema S:

$$\Delta x = \frac{\Delta x' - v\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \xrightarrow{\Delta t'=0} \Delta x = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \rightarrow \beta = \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 - (\Delta x')^2}}{\Delta x} = \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 - \left[(\Delta x)^2 - (c\Delta t)^2\right]}}{\Delta x} = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$$

$$\beta = \frac{v}{c} \Rightarrow v = c\beta = \frac{c^2\Delta t}{\Delta x} = \frac{(3\cdot 10^8)^2 \cdot (0{,}95\cdot 10^{-6} - 0{,}72\cdot 10^{-6})}{(1{,}7\cdot 10^3 - 1{,}5\cdot 10^3)} = 10^8 m/s$$

## Esercizio

Nel sistema di riferimento S un raggio di luce si sposta nel verso delle x positive e un altro si muove nel verso opposto. Qual è la velocità del primo raggio di luce visto nel sistema di riferimento solidale con il secondo? Risolvi il problema prima nell'ambito della meccanica classica e poi in quello della meccanica relativistica.




## Soluzione

Risolviamo il problema ponendo u=c (la velocità del raggio di luce rispetto a S è c) e v=-c (il sistema di riferimento S' solidale con il secondo raggio di luce si muove nel verso negativo delle x con una velocità di modulo c).

Nell'ambito della meccanica classica, dove valgono le trasformazioni di Galileo, si ottiene:

$$u' = u - v = c - (-c) = 2c$$

Il primo raggio di luce si allontana dal secondo con una velocità doppia di quella che esso ha nel sistema S.

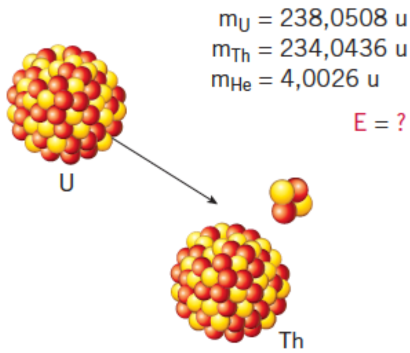
Secondo la teoria della relatività (secondo postulato), invece, la velocità della luce deve essere la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Infatti, grazie alle trasformazioni di Lorentz, si ottiene:

$$u' = \frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}} = \frac{c-(-c)}{1-\frac{c(-c)}{c^2}} = \frac{2c}{2} = c$$


Quindi, il risultato ottenuto mostra proprio che, anche vista da un altro raggio luminoso, la velocità della luce rimane uguale a c.

## Esercizio

Un nucleo di uranio-238 (massa $m_U$=238,0508 u) può decadere in modo spontaneo, dando origine a un nucleo di torio-234 (massa $m_{Th}$=234,0436 u) e a un nucleo di elio-4 (massa $m_{He}$=4,0026 u). Quanto vale l'energia emessa nel corso di tale decadimento?




### Soluzione

La somma delle masse dei nuclei di torio e di elio è:

$$m_{TH} + m_{He} = 234{,}0436u + 4{,}0026u = 238{,}0462u$$

risulta minore della massa del nucleo originale di uranio $m_U$=238,0508 u.
La differenza tra la massa iniziale e quella finale del sistema è:

$$\Delta m = m_U - (m_{Th} + m_{He}) = 238{,}0508u - 238{,}0462u = 0{,}0046u = 0{,}0046 \cdot 1{,}6605 \cdot 10^{-27} = 7{,}6 \cdot 10^{-30}\ kg$$

dove l'unità di massa atomica u=1,6605x10$^{-27}$ kg.

Per l'equivalenza massa-energia, alla scomparsa di questa massa deve corrispondere l'emissione di una quantità E di energia pari a:

$$E = \Delta m \cdot c^2 = 7{,}6 \cdot 10^{-30} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 6{,}8 \cdot 10^{-13}\ J$$

motivo per cui la somma complessiva di tutte le energie e di tutte le masse in gioco nel processo di decadimento deve rimanere inalterata nel tempo (principio di conservazione della massa-energia).

## Esercizio

Un oggetto di alluminio di massa 3 kg viene riscaldato da 20,0 °C a 870 °C. Il calore specifico dell'alluminio è circa 0,9 kJ/(kg•K). Determina la variazione di massa.

## Soluzione

Combiniamo la relazione massa-energia con la relazione fondamentale della termologia:

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 \qquad \Delta E = C\Delta T$$

$$\Delta m \cdot c^2 = C\Delta T \Rightarrow \Delta m = \frac{C\Delta T}{c^2} = \frac{3 \cdot 0,9 \cdot 10^3 \cdot 850}{(3 \cdot 10^8)^2} = 3 \cdot 10^{-11}\ kg$$

Ciò che abbiamo ottenuto è la differenza di massa che si dovrebbe avere. Ossia, l'oggetto di alluminio a 870 °C "pesa di più" dello stesso oggetto a 20 °C.

## Esercizio

Al CERN di Ginevra i protoni vengono accelerati fino ad una energia $E=7{,}20\times10^{-8}$J. Qual è la velocità dei protoni quando raggiungono tale energia?

## Soluzione

L'energia totale E di un corpo di massa a riposo $m_0$ (massa a riposo del protone $m_0=1{,}67\times10^{-27}$, kg) in movimento con velocità di modulo v rispetto a un dato sistema di riferimento, è:

$$E = \gamma m_0 c^2$$

Da questa formula ricaviamo il fattore γ, noto il quale sarà possibile calcolare la velocità dei protoni quando avranno raggiunto l'energia E:

$$\gamma = \frac{E}{m_0 c^2} = \frac{7{,}20 \cdot 10^{-8}}{1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot (3 \cdot 10^8)^2} = 479$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow v = c\sqrt{\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}} = c \cdot \sqrt{\frac{479^2 - 1}{479^2}} \cong c$$

La velocità dei protoni è praticamente indistinguibile da quella della luce.

## Esercizio

L'energia delle particelle elementari viene spesso espressa in MeV (1eV=1,6x10$^{-19}$J) e di conseguenza, la massa di riposo viene espressa in MeV/c$^2$. Un elettrone ha una massa di riposo pari a 0,51 MeV/c$^2$. A) Qual è il valore della massa dell'elettrone fermo, espressa in chilogrammi? B) Quanta energia è necessaria per creare un elettrone? C) Quando l'energia relativistica totale dell'elettrone è il doppio di quella a riposo, qual è la sua quantità di moto?

### Soluzione

A) La massa dell'elettrone fermo, espressa in chilogrammi vale:

$$m_e = \frac{0,51\ MeV}{c^2} = \frac{0,51 \cdot 1,6 \cdot 10^{-13}}{(3 \cdot 10^8)^2} \cong 9 \cdot 10^{-31} kg$$

B) Sfruttando l'equivalenza massa-energia, l'energia necessaria per creare un elettrone è pari a:

$$E_0 = m_0 c^2 = \frac{0,51\ MeV}{c^2} \cdot c^2 = 0,51\ MeV = 0,51 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 0,82 \cdot 10^{-13} J$$

C) L'energia relativistica totale di una particella, e quindi del nostro elettrone, è data dalla seguente relazione:

$$E = \gamma m_0 c^2 \qquad \text{dove: } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Pertanto, se vogliamo che la sua energia raddoppi, deve essere:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2$$

e la velocità dell'elettrone dovrà assumere il seguente valore:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2 \Rightarrow v = \frac{\sqrt{3}}{2} c = 2,6 \cdot 10^8 m/s$$

In definitiva, la quantità di moto dell'elettrone corrispondente a questa energia relativistica doppia è:

$$p = \gamma m_0 v = 2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 2,6 \cdot 10^8 = 47,3 \cdot 10^{-23} kg \cdot m/s$$

## Esercizio

I muoni sono particelle elementari con massa di riposo $m_0$=105,7 MeV/$c^2$ che si creano quando raggi cosmici di alta energia entrano in atmosfera. La vita media dei muoni è pari a $\tau$=1,56 μs nel sistema di riferimento in cui sono fermi, e decadono in altre particelle elementari. Considera un muone creato a 10 km dal livello del mare con velocità v=0,98c diretto verso il basso. Calcola: a) la quantità di energia necessaria per creare il muone; b) l'energia totale relativistica del muone; c) la distanza percorsa da un muone nel sistema di riferimento in cui è fermo, secondo la teoria classica e quella relativistica.

## Soluzione

a) Sfruttando l'equivalenza massa-energia, l'energia necessaria per creare un muone è pari a:

$$E_0 = m_0 c^2 = \frac{105,7\ MeV}{c^2} \cdot c^2 = 105,7\ MeV = 105,7 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 169 \cdot 10^{-13} J$$

b) L'energia relativistica totale di una particella, e quindi del nostro muone, è data dalla seguente relazione:

$$E = \gamma m_0 c^2 = 5 \cdot 169 \cdot 10^{-13} = 845 \cdot 10^{-13} J$$

dove: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0,98^2}} = 5 \qquad \beta = \frac{v}{c} = \frac{0,98c}{c} = 0,98$

c) La distanza percorsa dal muone nel sistema di riferimento in cui è fermo (tempo proprio $\tau$=1,56 μs ), secondo la fisica classica, vale:

$$d = v\tau = 0,98 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 1,56 \cdot 10^{-6} = 459\ m$$

Invece il muone, avendo una velocità relativistica, subisce una dilatazione temporale della sua vita media:

$$\Delta t' = \gamma \Delta t = 5 \cdot 1,56 \cdot 10^{-6} = 7,8 \cdot 10^{-6} s = 7,8\ \mu s$$

per cui la distanza percorsa secondo la teoria relativistica, sarà maggiore rispetto a quella classica:

$$d = v\Delta t' = 0,98 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 7,8 \cdot 10^{-6} = 2293\ m$$

## Esercizio

Un oggetto celeste molto lontano, per esempio un quasar, emette onde luminose con frequenza f. La frequenza delle stesse onde misurata sulla Terra è f'=0,75 f.
A) Il quasar si sta allontanando o avvicinando? B) Calcolare la velocità di allontanamento (o avvicinamento) relativo tra la Terra e il quasar; C) Quanto vale il suo redshift?

## Soluzione

A) Poiché f'<f (λ'>λ), il quasar e la Terra si stanno allontanando.

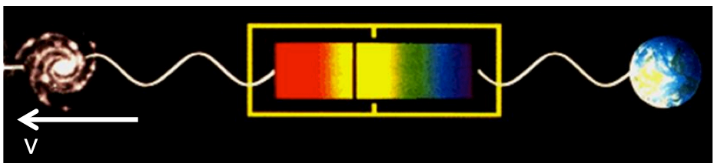
B) La velocità di allontanamento relativo tra la Terra e il quasar la ricaviamo dalla formula dell'effetto Doppler relativistico nel caso in cui sorgente (quasar) e osservatore (Terra) si allontanano:

$$f' = f\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}} \Rightarrow v = c\frac{1-\left(\frac{f}{f'}\right)^2}{1+\left(\frac{f}{f'}\right)^2} = 3\cdot 10^8 \cdot \frac{1-\left(\frac{0,75f}{f}\right)^2}{1+\left(\frac{0,75f}{f}\right)^2} = 8,4\cdot 10^7\, m/s$$

C) In astrofisica, l'effetto Doppler viene sfruttato attraverso l'introduzione della grandezza adimensionale z, chiamata redshift (spostamento verso il rosso), che nel nostro caso vale:

$$z = \frac{f}{f'} - 1 = \frac{f}{0,75f} - 1 = 0,33$$

Quindi, nel caso in cui sorgente ed osservatore si allontanano (f'<f; λ'>λ) si ha z<0 (il colore della luce ricevuto è spostato verso il rosso dello spettro).




## Esercizio

Una stella emette luce di lunghezza d'onda λ=520 nm (corrispondente a luce verde). La sua velocità di avvicinamento alla Terra è pari a due terzi della velocità della luce nel vuoto. Calcola la lunghezza d'onda rilevata da un osservatore a Terra.

## Soluzione

Nota la relazione tra lunghezza d'onda e frequenza:

$$c = \lambda' f' \Rightarrow \lambda' = \frac{c}{f'}$$

e utilizzando la legge dell'effetto Doppler relativistico (caso sorgente ed osservatore in avvicinamento):

$$f' = f\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \qquad dove: \beta = \frac{v}{c} = \frac{\frac{2}{3}c}{c} = \frac{2}{3}$$

si ottiene:

$$\lambda' = \frac{c}{f\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}} = \lambda\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = 520 \cdot 10^{-9} \cdot \sqrt{\frac{1-\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}}} = 233 \cdot 10^{-9}\ m = 233\ nm$$

che corrisponde a luce (onde elettromagnetiche) nell'ultravioletto.